Cvičení č. 7

Bc. Jan Kaláb
xkalab00

29. března 2012

1 Zadání

Aproximujte pomocí Fourierovy řady funkci obdélníkového impulsu $f(t) = 1$ pro $t \in \langle 0, 1)$ a $f(t) = 0$ pro $t \in \langle 1, 2\rangle$. Spočítejte koeficienty Fourierovy řady pomocí TKSL a vypište hodnoty nenulových koeficientů. Porovnejte aproximaci Fourierovy řady se zadanou funkcí $f(t)$ v jedné periodě (pro demonstraci použijte různý počet členů Fourierovy řady). Výpočty demonstrujte obrázky.

2 Úvod

Fourierovy řady jsou limitou posloupnosti trigonometrických polynomů, které mají část složenou z kosinů a část ze sinů. Používají se především při studiu jevů s periodickým charakterem. Výhodou těchto řad je skutečnost, že požadavky kladené na jejich konvergenci k rozvíjené funkci jsou slabší než v případě rozvojů do Taylorových řad (nepožadujeme např. existenci derivací všech řádů dané funkce v daném bodě; nepožadujeme dokonce ani spojitost rozvíjené funkce). Rovněž výpočet koeficientů může být (zejména při použití numerických metod) jednodušší záležitostí než u řad Taylorových.

http://mathonline.fme.vutbr.cz/Fourierovy-rady/sc-73-sr-1-a-60/default.aspx

2.1 Příklad výpočtu aproximace $\sin^2(\omega t)$

Ověřme platnost rovnice

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t). \tag{1}$$

Výraz (1) lze odvodit analyticky:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) &= 1 \\
\cos(2\omega t) &= \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\
\cos(2\omega t) &= 1 - \sin^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) \\
\cos(2\omega t) &= 1 - 2\sin^2(\omega t) \\
\frac{1-\cos(2\omega t)}{2} &= \sin^2(\omega t)
\end{aligned}$$

Výraz (1) lze proto přepsat do tvaru

$$\sin^2(\omega t) = \frac{a_0}{2} + a_2\cos(2\omega t)$$

$$a_0 = 1 \qquad a_2 = -\frac{1}{2}$$

Výraz $\frac{a_0}{2}$ má význam "nulového kmitočtu" tzn. konstantní (tzv. stejnosměrné) složky.

Analytické odvození potvrdilo rozklad mocninné funkce na součet harmonických složek ve tvaru

$$\begin{aligned}
f(t) = {} & \tfrac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + a_3\cos 3\omega t + \cdots \\
& + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + b_3\sin 3\omega t + \cdots
\end{aligned} \tag{2}$$

Získání koeficientů a_0, a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2, b_3,..., b_n analytickými metodami (úpravou vzorců) je určitě nepopulární.
Výraz (2) se nazývá Fourierova řada, pro kterou naštěstí bylo velmi velmi dávno odvozeno

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{T}\int_0^{2T} f(t)dt, \\
a_k &= \tfrac{1}{T}\int_0^{2T} f(t)\cos(k\omega t)dt, \quad k = 1,2,3,\ldots,n, \\
b_k &= \tfrac{1}{T}\int_0^{2T} f(t)\sin(k\omega t)dt, \quad k = 1,2,3,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Výpočet koeficientů Fourierovy řady pomocí TKSL

Pro koeficienty Fourierovy řady platí:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt, \\
a_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega t)dt, \\
a_2 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega 2t)dt, \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega n t)dt, \\
\\
b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega t)dt, \\
b_2 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega 2t)dt, \\
&\vdots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega n t)dt,
\end{aligned}
$$

Výpočet koeficientů vyžaduje vyčíslení určitého integrálu. Vzhledem k tomu, že analytický výpočet určitého integrálu může být někdy velmi složitý, je vhodné použít numerické metody. V návaznosti na koncepci TKSL se využívá převod integrálu na ekvivalentní diferenciální rovnici.

Např. koeficient

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 2\omega t \; dt, \tag{4}$$

se převede na

$$a_2' = \frac{2}{T} f(t)\cos 2\omega t, \qquad a_2(0) = 0. \tag{5}$$

Horní mez integrálu (4) představuje bod, ve kterém se počítá řešení diferenciální rovnice (5).

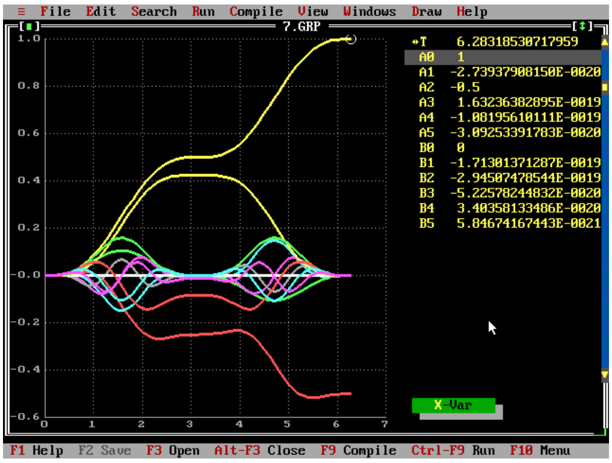
Odpovídající zápis v TKSL pro funkci $f(t) = \sin^2(t)$:

```
var f,a2;

const PI=3.1415926535897932385,eps=1E-20,k=1/PI,om=1,tmax=2*PI;

system

f=sin(t)*sin(t);
a2'=k*f*cos(2*om*t) &0;
sysend.
```

Očekávaný výsledek výpočtu pro periodu $T = 2\pi$ (tzn. pro konvenci TKSL $tmax = 2\pi$) je v Obr. *doplnte* uveden v pravé části textu.

Pozn. Průběh řešení dif. rovnice (5) nás ve skutečnosti nezajímá, podstatný je výsledek ($a_2(2\pi) = -0.5$)

3 Postup, hodnoty



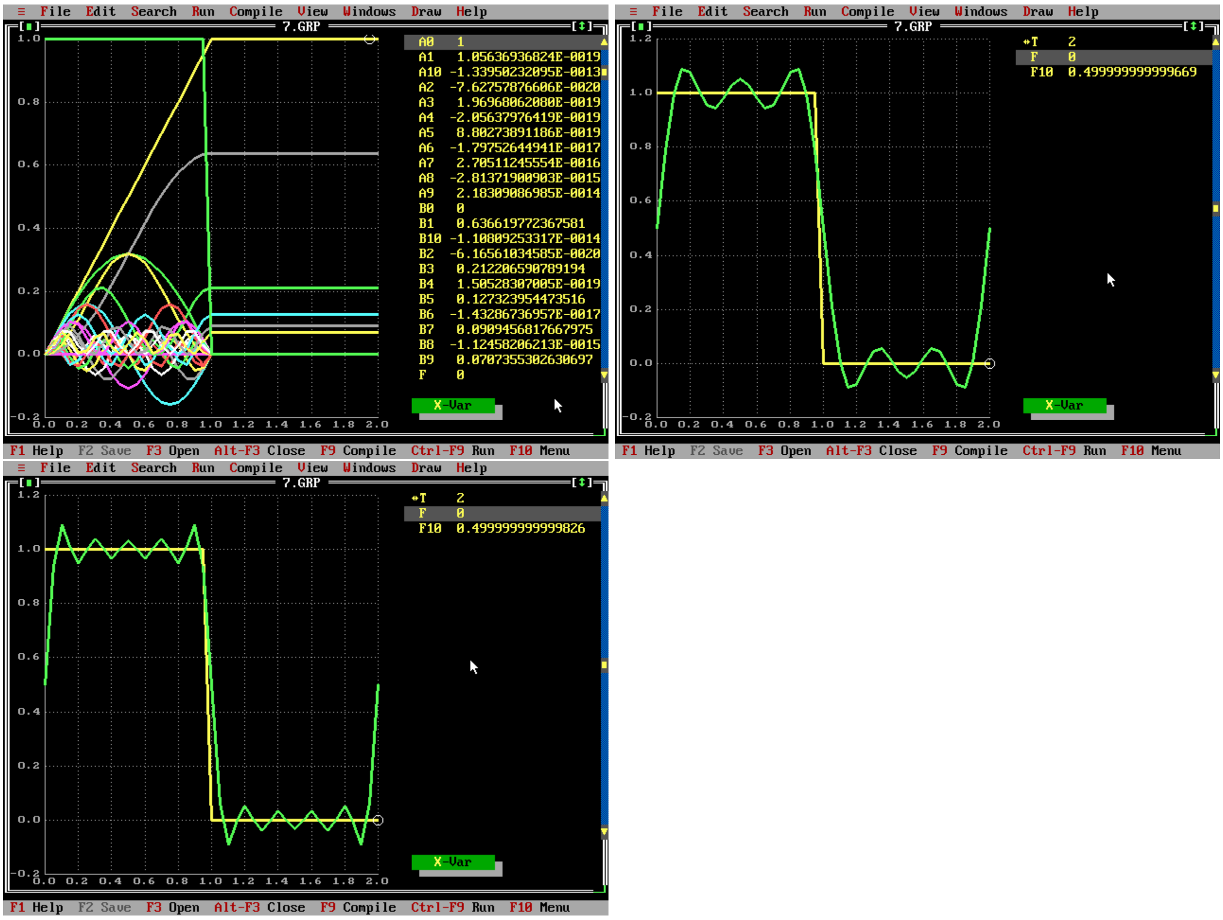
4 Ukázka kódu pro TKSL

```
var f, f5;
{
var a0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10;
var b0, b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10;
```

```
}
const PI = 3.1415926535897932385, eps = 1E-10, k = 1 {2 / T},
om = PI {2 * PI / tmax}, tmax = 2, DT = 0.05;
const a0 = 1;
const b0 = 0;
const b1 = 0.637;
const b3 = 0.212;
const b5 = 0.127;
const b7 = 0.091;
const b9 = 0.071;

system
    case t of
        < 1: f = 1;
        else f = 0;
    esac;

    {
    a0' = k * f * cos(0) &0;
    b0' = k * f * sin(0) &0;
    a1' = k * f * cos(om * t) &0;
    b1' = k * f * sin(om * t) &0;
    a2' = k * f * cos(2 * om * t) &0;
    b2' = k * f * sin(2 * om * t) &0;
    a3' = k * f * cos(3 * om * t) &0;
    b3' = k * f * sin(3 * om * t) &0;
    a4' = k * f * cos(4 * om * t) &0;
    b4' = k * f * sin(4 * om * t) &0;
    a5' = k * f * cos(5 * om * t) &0;
    b5' = k * f * sin(5 * om * t) &0;
    a6' = k * f * cos(6 * om * t) &0;
    b6' = k * f * sin(6 * om * t) &0;
    a7' = k * f * cos(7 * om * t) &0;
    b7' = k * f * sin(7 * om * t) &0;
    a8' = k * f * cos(8 * om * t) &0;
    b8' = k * f * sin(8 * om * t) &0;
    a9' = k * f * cos(9 * om * t) &0;
    b9' = k * f * sin(9 * om * t) &0;
    a10' = k * f * cos(10 * om * t) &0;
    b10' = k * f * sin(10 * om * t) &0;
}
```

```
    f5 = a0 / 2 + b1 * sin(om * t)
    + b3 * sin(3 * om * t) + b5 * sin(5 * om * t);
sysend.
```

5 Grafický výstup



Výpočet koeficientů, aproximace pro 5 a 10 koeficiantů.

6 Závěr

Moc jsem neměl tušení která bije, ale nakonec to fungovalo. Aproximace obdélníku fungovala podle očekávání – více koeficientů bylo obdélníákovější. Nestabilita TKSL mi velmi zvedala krevní tlak.