Cvičení č. 10

Bc. Jan Kaláb
xkalab00

24. dubna 2012

1 Úvod

Úkolem cvičení bude prozkoumat stabilitu a konvergenci běžně používaných numerických metod. Budeme numericky řešit počáteční úlohu

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

kde $\lambda < 0$.

Známé analytické řešení dif. rovnice (1) je ve tvaru

$$y = e^{\lambda t}. \tag{2}$$

2 Stabilita a konvergence numerických metod

Řekneme, že numerická metoda je *absolutně stabilní*, pokud pro daný integrační krok h a danou diferenciální rovnici chyba vzniklá při výpočtu y_n se nezvětší v následujících hodnotách $y_k,\ k > n$. Tedy je zaručeno, že aproximace y_i konverguje k hodnotě přesného řešení $y(t_i)$.

Pro náš příklad (1) musí tedy platit **podmínka stability**

$$|y_{i+1}| \leq |y_i|. \tag{3}$$

Dále si zavedeme **funkci stability** numerické metody

$$R(z) = \frac{y_{i+1}}{y_i}, \quad z = h\lambda, \tag{4}$$

předpokládáme, že λ je obecně komplexní číslo, proto $z \in \mathcal{C}$.

Nakonec si definujeme **oblast (absolutní) stability** numerické metody

$$D = \{z \in \mathcal{C}; |R(z)| \leq 1\} \tag{5}$$

2.1 Explicitní numerické metody

Zajímá nás oblast stability explicitní Eulerovy metody a Taylorovy řady.

2.1.1 Explicitní Eulerova metoda

Explicitní Eulerova metoda pro danou úlohu (1) je zadána vztahem

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' \tag{6}$$

po dosazení obdržíme

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda)y_i = (1 + h\lambda)^i y_0\,, \tag{7}$$

kde $y_0 = y(0) = 1$.

Aby platila podmínka konvergence (3), musí platit

$$|1 + h\lambda| \leq 1\,. \tag{8}$$

Hodnocení explicitní Eulerovy metody z pohledu stability

Explicitní Eulerova metoda je absolutně stabilní pro λ a h takové, pro které je splněna podmínka (8). Položme nyní $z = h\lambda$ a řekneme, že oblastí absolutní stability je v našem případě jednotkový kruh $|z + 1| \leq 1$ Obr. 1 (zvýrazněná část) komplexní roviny se středem (-1,0).

Explicitní Eulerova metoda nemá tedy příliš velkou oblast absolutní stability a z tohoto hlediska ji nelze použít k řešení tuhých diferenciálních rovnic (pro které je obecně $|\lambda| \gg 1$).

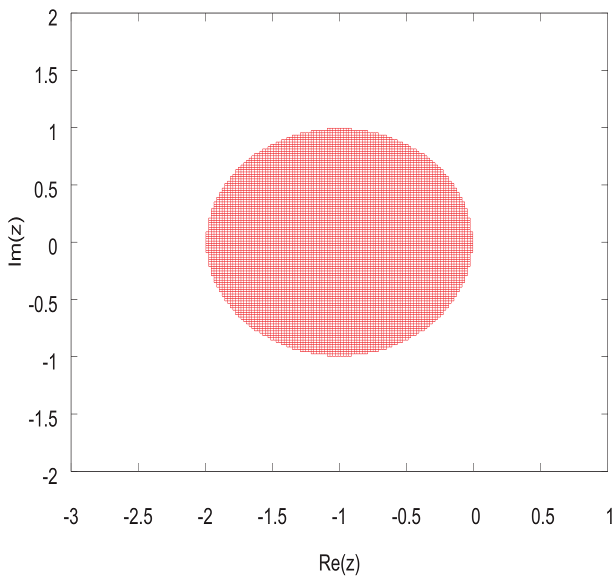
2.1.2 Explicitní Taylorova metoda

Explicitní Taylorova řada je ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hy_i' + \tfrac{h^2}{2!}y_i'' + \tfrac{h^3}{3!}y_i''' + \cdots + \tfrac{h^n}{n!}y_i^{(n)} \\ y_{i+1} &= y_i + DY1_i + DY2_i + \cdots + DYn_i, \quad ORD = n \end{aligned}$$

Pozn. pro zajímavost členy Taylorovy řady lze vypočíst rekurentně

$$\begin{aligned} DY1_i &= h\lambda y_i \\ DY2_i &= \tfrac{h}{2}\lambda DY1_i \\ &\vdots \\ DYn_i &= \tfrac{h}{n}\lambda DY(n-1)_i \end{aligned}$$



Obrázek 1: Oblast absolutní stability - explicitní Eulerova metoda

po dosazení derivací obdržíme

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h\lambda y_i + \tfrac{h^2}{2}\lambda^2 y_i + \tfrac{h^3}{3!}\lambda^3 y_i + \cdots + \tfrac{h^n}{n!}\lambda^n y_i \\
y_{i+1} &= (1 + h\lambda + \tfrac{h^2}{2}\lambda^2 + \tfrac{h^3}{3!}\lambda^3 + \cdots + \tfrac{h^n}{n!}\lambda^n) y_i
\end{aligned}
$$

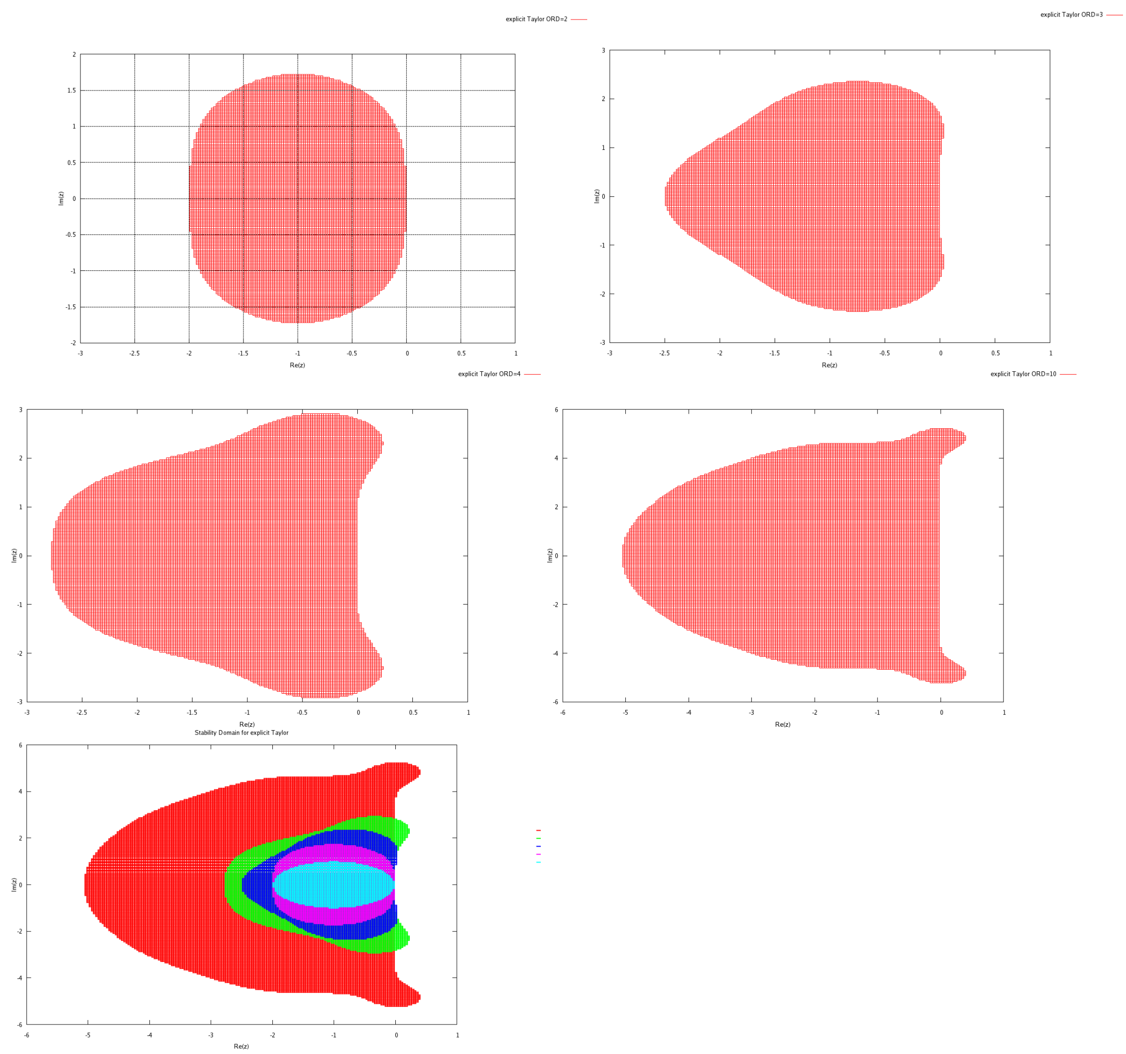
Úkoly:
– *Zjistěte funkci stability R(z) = ? pro explicitní Taylorovu řadu ORD=2,3,4,10.*
– *Vykreslete v GNU plotu grafy oblastí stabilit D = ?*
(příkaz - load P:\...\GNUplotStability.gnu)

$$R(z) = |1 + z + \frac{z^2}{2}|$$

$$R(z) = |1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!}|$$

$$R(z) = |1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!}|$$

$$R(z) = |1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^{10}}{10!}|$$



2.2 Oblasti stabilit numerických metod

Definice 2.1 *Dahlquist 1963: Numerické metody, u kterých oblast stability D splňuje podmínku*

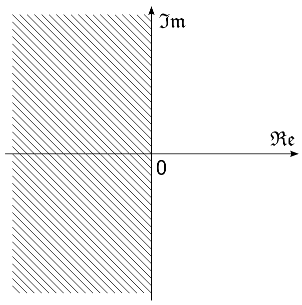
$$D \supset \mathcal{C}^- = \{z \in \mathcal{C}; \Re e(z) \leq 0\}\,,$$

se nazývají **A-stabilní**.

Oblastí absolutní stability A-stabilní numerické metody je tedy nadmnožina celé záporné poloroviny $\mathcal{C}^- = \{z \in \mathcal{C}; \Re\mathrm{e}(z) < 0\}$ viz Obr. 2.

Definice 2.2 *Ehle 1969: Metodu nazýváme* **L-stabilní**, *pokud je A-stabilní a existuje limita*

$$\lim_{\Re e(z) \to -\infty} R(z) = 0\,.$$



Obrázek 2: Oblast stability A-stabilní numerické metody

2.3 Implicitní numerické metody

Odvodíme stabilitu u běžně používané implicitní Eulerovy metody, lichoběžníkové metody a nově také implicitní Taylorovy řady.

2.3.1 Implicitní Eulerova metoda

Mějme implicitní Eulerovu metodu ve tvaru

$$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1}\,. \tag{9}$$

Dosadíme-li dříve zmíněný příklad (1) do implicitní Eulerovy formule (9), obdržíme

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_{i+1}\,. \tag{10}$$

Po úpravách obdržíme funkci stability pro implicitní Eulerovu metodu ve tvaru

$$R(z) = \frac{1}{1-z}\,, \tag{11}$$

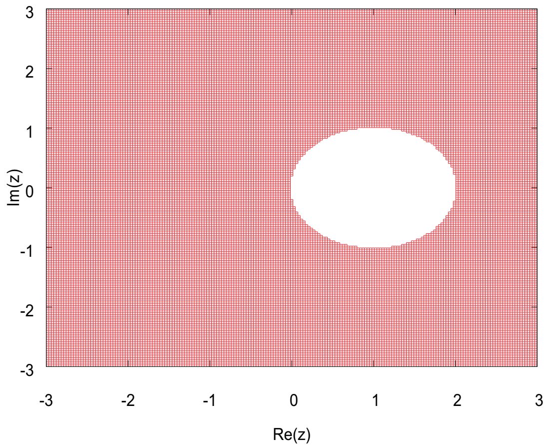
obecně tedy pro $z = a + ib$, kde $a < 0$, je $R(z) = \frac{1}{(1-a-ib)}$.

Platí $|R(z)| \leq 1$ a $\lim\limits_{a \to -\infty} R(z) = 0$. Implicitní Eulerova metoda je tedy L-stabilní. Její oblast absolutní stability je znázorněna na Obr. 3.

2.3.2 Implicitní lichoběžníková metoda

Lichoběžníkovou metoda je dána vztahem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1})\,. \tag{12}$$



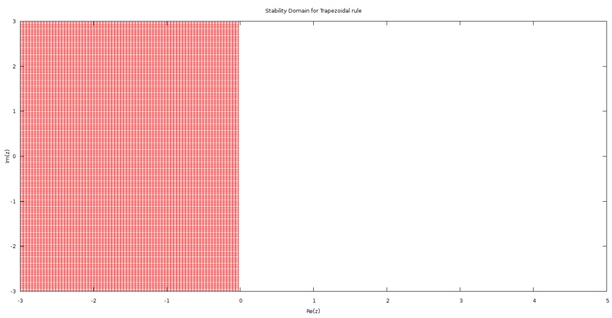
Obrázek 3: Oblast absolutní stability - implicitní Eulerova metoda

Její aplikace na úlohu (1) poskytne

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1}) = \frac{y_i(1 + h\lambda/2)}{1 - h\lambda/2}\,, \tag{13}$$

Úkoly:
– *Zjistěte funkci stability $R(z) = ?$ pro implicitní Lichoběžníkovou metodu.*
– *Vykreslete v GNU plotu graf oblasti stability (příkaz - load P:\...\GNUplotStability.gnu).*
– *Jedná se o A-stabilní numerickou metodu? – BONUSOVÁ OTÁZKA: Je splněna podmínka L-stabilní numerické metody (dokažte pomocí výpočtu limity viz Def. 2.2)?*

$$R(z) = \left|\frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}\right|$$



Metoda je A-stabilní

2.3.3 Implicitní Taylorova metoda

Implicitní Taylorova řada

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + hy'_{i+1} - \tfrac{h^2}{2!}y''_{i+1} + \tfrac{h^3}{3!}y'''_{i+1} - \cdots - \tfrac{(-h)^n}{n!}y^{(n)}_{i+1} \\
y_{i+1} &= y_i - DY1_{i+1} - \cdots - DYn_{i+1}, \quad ORD = n
\end{aligned}
$$

Pozn. pro zajímavost členy Taylorovy řady lze vypočíst rekurentně

$$
\begin{aligned}
DY1_{i+1} &= -h\lambda y_{i+1} \\
DY2_{i+1} &= -\tfrac{h}{2}\lambda DY1_{i+1} \\
&\vdots \\
DYn_{i+1} &= -\tfrac{h}{n}\lambda DY(n-1)_{i+1}
\end{aligned}
$$

po dosazení derivací obdržíme

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h\lambda y_{i+1} - \tfrac{h^2}{2!}\lambda^2 y_{i+1} + \tfrac{h^3}{3!}\lambda^3 y_{i+1} - \cdots - \tfrac{(-h)^n}{n!}\lambda^n y_{i+1} \\
y_{i+1} &= \left(\tfrac{1}{1-h\lambda+\frac{h^2}{2!}\lambda^2-\frac{h^3}{3!}\lambda^3+\cdots+\frac{(-h)^n}{n!}\lambda^n}\right)y_i
\end{aligned}
$$

Úkoly:

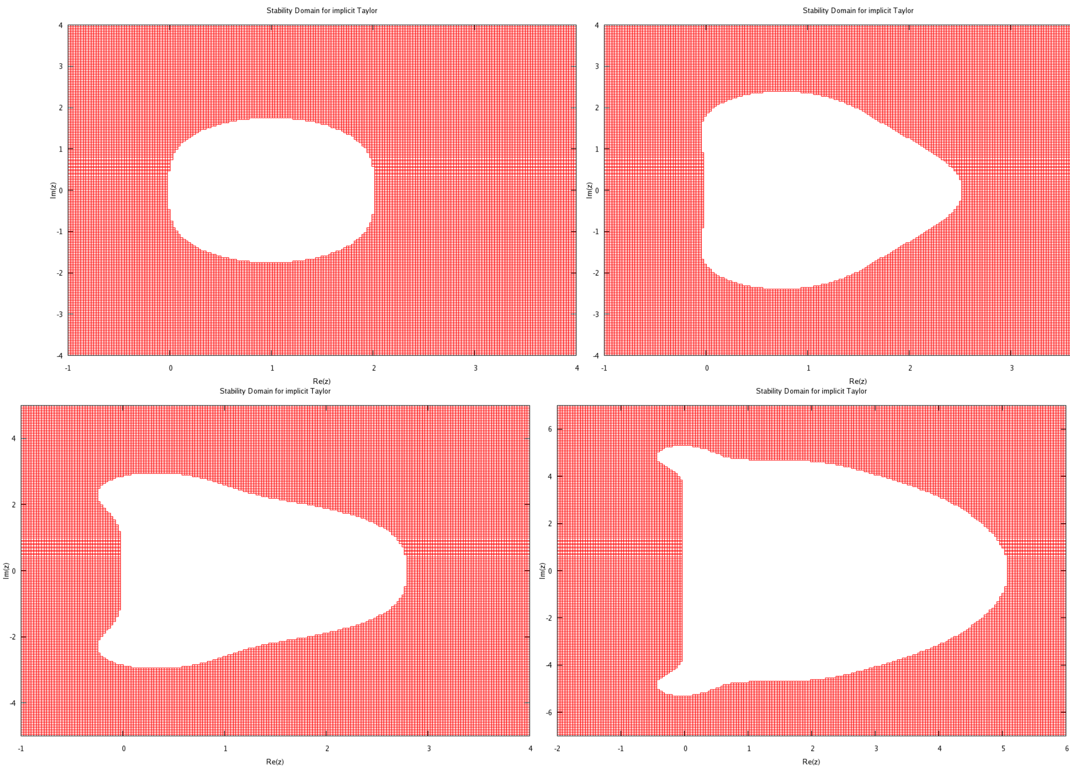
– *Zjistěte funkce stability R(z) = ? pro implicitní Taylorovu řadu ORD=2,3,4,10*
– *Vykreslete v GNU plotu grafy oblastí stabilit D = ?*
(příkaz - load P:\...\GNUplotStability.gnu)

$$R(z) = |\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}|$$

$$R(z) = |\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!}}|$$

$$R(z) = |\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!}}|$$

$$R(z) = |\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \frac{z^{10}}{10!}|}$$



3 Numerické řešení

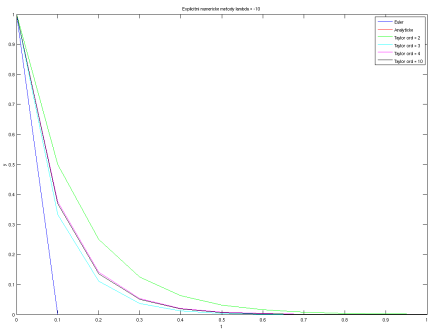
Úkoly:

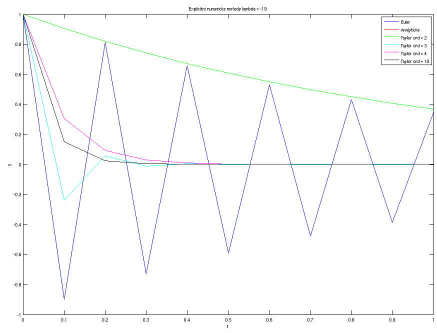
– Spusťte v MatLabu skript pro numerický výpočet dif. rovnice (1) pomocí explicitních numerických metod - soubor "explicitni.m".
Prostudujte jednoduchou implementaci explicitních numerických metod - soubory "eul.m, tay.m".
Zadejte konstantu $\lambda = -10$, integrační krok necháme pro všechny simulace konstantní $h = 0.1$ (proměnná $z = -1$). Ověřte z vykresleného grafu stabilitu a konvergenci numerického výpočtu.
Poté zvolte konstantu λ na okraji oblasti stability Eulerovy explicitní numerické metody a sledujte stabilitu a konvergenci výpočtu numerických metod.

– Spusťte v MatLabu skript pro numerický výpočet dif. rovnice (1) pomocí implicitních numerických metod - soubor "implicitni.m".
Prostudujte jednoduchou implementaci implicitních numerických metod - soubory "impl_eul.m, impl_lich.m, impl_tay.m".
Zadejte konstantu $\lambda = -10$, integrační krok necháme pro všechny simulace konstantní $h = 0.1$ (proměnná $z = -10$). Ověřte z vykresleného grafu stabi-

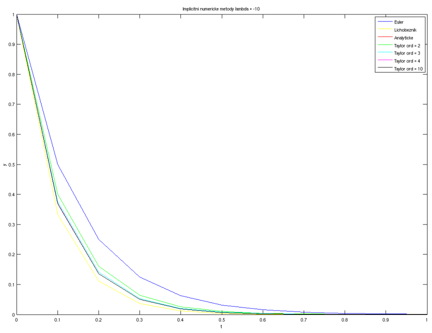
litu a konvergenci numerického výpočtu.
Zvyšujte absolutní hodnotu konstanty ($|\lambda| > 10$) a sledujte stabilitu a konvergenci výpočtu numerických metod. Jak se chová lichoběžníková metoda?

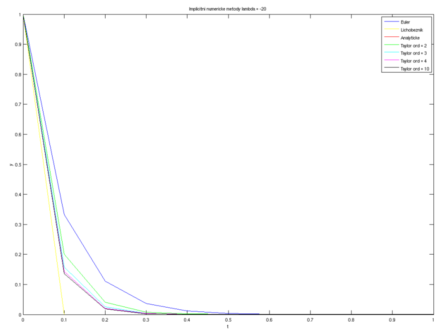
Při $\lambda = -10$, jsou metody ještě stabilní. Při $\lambda = -19$ (blíží se mezi stability), jasně vidíme že konvergují daleko pomaleji.

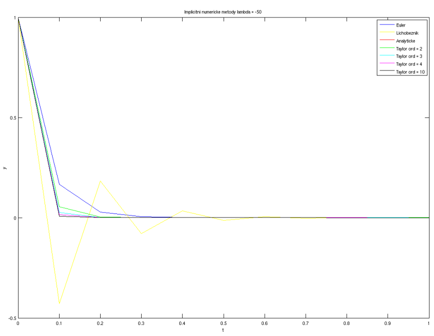




U implicitních metod vidíme, že s rostoucí λ konvergují rychleji. Vyjímkou je lichoběžníková metoda, která nejrychleji konverguje právě při $\lambda = -20$. Při vyšších hodnotách λ pak dochází k překmitům.







4 Závěr

Prostudovali jsme jednotlivé metody a zjistili oblasti jejich (ne)stability. Zajímavé bylo zjištění, že s rostoucím řádem Eulerovy metody graf stability více a více připomíná vesmírnou loď :-).